

1 (مجموعه چند جمله از دنباله و 20 و 10 و 5 برابر 635 می باشد ؟ (1/5 نمره)

2 (معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشد . (1 نمره)

3 (فاصله ی نقطه ی $A(2, -3)$ از خط به معادله ی $3x - 4y = 8$ را بدست آورید . (1/5 نمره)

4 (دامنه توابع زیر را بیابید (1/5 نمره)

$$f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + x - 72}$$

$$g(x) = \sqrt{2x - 8}$$

5 (ضابطه ی وارون تابع $f(x) = 2x + 3$ را بدست آورید (1 نمره)

6 (توابع $f(x) = 5x + 1$ و $g(x) = \frac{x - 1}{x + 3}$ مفروض اند ، دامنه و ضابطه $f \circ g$ را بیابید . (1/5 نمره)

7 (اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ حاصل عبارت های زیر را بر حسب a و b بدست آورید . (1/5 نمره)

$$\log 5 =$$

$$\log 18 =$$

$$\log 0/75 =$$

8 (معادله لگاریتمی مقابل را حل کنید. (1/5 نمره)

$$\log(x - 1) + \log(x + 1) = \log 8 + \log(x - 2)$$

9) با توجه به نمودار تابع مثلثاتی $y = \cos x$ نمودار تابع $y = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$ را رسم کنید. (1/5 نمره)

10) با استفاده از روابط نسبت های مجموع دو زاویه ثابت کنید : (1/5 نمره)

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

11) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید . (1 نمره)

$$\tan(105^\circ) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) =$$

12) با توجه به دامنه تابع ، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$ در نقطه $x = 7$ چه می توان گفت ؟ (1 نمره)

(13) حاصل حد های زیر را بدست آورید . (2 نمره)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x^3 - 8} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x^2 - 49} =$$

(14) تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 2\cos x - \sin x & x > 0 \end{cases}$ داده شده است . پیوستگی تابع f را درصفر بررسی کنید. (2 نمره)

پاسخ تشریحی

پاسخ سوال 1 :

$$a = 5, q = 2 \rightarrow S_n = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 5 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 635 \rightarrow 2^n - 1 = 127 \rightarrow 2^n = 128 \rightarrow n = 7$$

پاسخ سوال 2 :

$$S = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1, \quad P = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - x + \frac{2}{9} = 0 \rightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 0$$

پاسخ سوال 3 :

$$3x - 4y - 8 = 0 \Rightarrow d = \frac{|3(2) - 4(-3) - 8|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$$

پاسخ سوال 4 :

$$f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + x - 72}$$

$$x^2 + x - 72 = 0$$

$$(x + 9)(x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ x = 8 \end{cases}$$

$$D_f = R - \{-9, 8\}$$

$$g(x) = \sqrt{2x - 8}$$

$$2x - 8 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow D_g = [4, \infty)$$

پاسخ سوال 5 :

$$f(x) = 2x + 3 \Rightarrow y = 2x + 3 \Rightarrow 2x = y - 3 \Rightarrow x = \frac{y - 3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}$$

پاسخ سوال 6 :

$$f(x) = 5x + 1 \Rightarrow D_f = R$$

$$g(x) = \frac{x - 1}{x + 3} \Rightarrow D_g = R - \{-3\}$$

$$D_{fog} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in R - \{-3\} \mid \frac{x - 1}{x + 3} \in R \right\} = R - \{-3\}$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x - 1}{x + 3}\right) = 5\left(\frac{x - 1}{x + 3}\right) + 1 = \frac{6x - 2}{x + 3}$$

پاسخ سوال 7 :

$$\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - a, \quad \log 18 = \log(2 \times 3^2) = \log 2 + 2\log 3 = a + 2b$$

$$\log 0.75 = \log \frac{3}{4} = \log 3 - 2\log 2 = b - 2a$$

پاسخ سوال 8 :

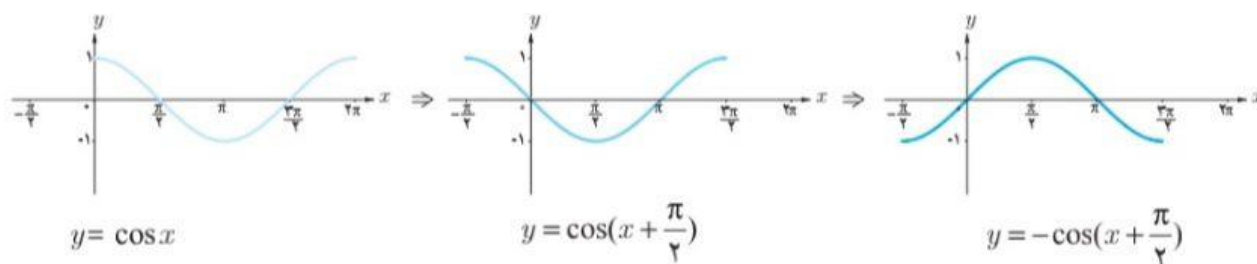
$$\log(x - 1) + \log(x + 1) = \log 8 + \log(x - 2) \Rightarrow \log(x - 1)(x + 1) = \log 8(x - 2)$$

$$(x - 1)(x + 1) = 8(x - 2) \Rightarrow x^2 - 1 = 8x - 16 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 3)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند

پاسخ سوال 9 :



$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

پاسخ سوال 10 :

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

پاسخ سوال 11 :

$$\tan(105^\circ) = \tan(60 + 45) = \frac{\tan 60 + \tan 45}{1 - \tan 60 \times \tan 45} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin(15^\circ) = \sin(60 - 45) = \sin 60 \cos 45 - \cos 60 \sin 45 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

پاسخ سوال 12 :

$$x^2 - 7x \geq 0$$

$$x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$$

x		0		7	
$x^2 - 7x$	+	+	-	+	+

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [7, +\infty)$$

چون تابع f در همسایگی چپ 7 تعریف نشده است بنابراین ، تابع f در نقطه $x = 7$ حد چپ ندارد .

پاسخ سوال 13 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+7)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+7)}{(x^2 + 2x + 4)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49} \times \frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}+3} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x+7)(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(x+7)(\sqrt{x+2}+3)} \\ &= \frac{1}{14 \times 6} = \frac{1}{84} \end{aligned}$$

پاسخ سوال 14 :

$$f(\circ) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \circ^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} 2\cos x - \sin x = 2\cos(\circ) - \sin(\circ) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \circ^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} 3x^2 + x = \circ$$

بنابراین تابع f در صفر پیوسته نیست اما در صفر پیوستگی راست دارد .

۱	دو نقاش در حال رنگ زدن یک سالن هستند. اگر دو نقاش با هم کار کنند ۱۸ روزه کار تمام می شود ولی اگر هر کدام به تنهایی کار کنند نقاش اول ۵ روز زودتر از دیگری کار را تمام می کند. هر کدام از این دو نقاش به تنهایی کار را چند روزه تمام می کنند؟
۲	در یک دنباله حسابی $S_n = 2n^2 + 5n$ است. مجموع ده جمله اول و جمله عمومی این دنباله را بیابید.
۳	اگر $x = -1$ یک ریشهی معادلهی $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، مقدار m و ریشهی دیگر معادله را بدست آورید.
۴	سه نقطه $A(1, 3)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(5, -5)$ سه رأس مثلث ABC هستند. الف) طول اضلاع مثلث را بدست آورید. ب) نشان دهید مثلث ABC قائم الزاویه است.
۵	مقادیر a و b را چنان بیابید که رابطهی زیر یک تابع باشد: $R = \{(3, 2a-1), (2, 1), (-3, b+1), (-2, 6), (-3, 2b-7), (3, -5)\}$
۶	دامنهی توابع زیر را به دست آورید: الف) $f(x) = \sqrt{4x-3}$ ب) $g(x) = \frac{3x+1}{x^2-3x-10}$
۷	اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ دو تابع باشند: الف) مقدار $(2f+g)(4)$ را بدست آورید. ب) مقدار $(fog)(7)$ را بدست آورید. ج) دامنهی تابع fog را بیابید.
۸	الف) حدود m را بیابید اگر تابع $f(x) = \left(\frac{3}{2} - m\right)^x$ یک تابع نمایی باشد. ب) نمودار تابع $y = 3^x + 1$ را رسم کنید.
۹	با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت های زیر را بدست آورید: الف) $\log_9 27$ ب) $\log_{1.0/0.1}$

۱۰	معادله لگاریتمی زیر را حل کنید:	۱/۵
	$2 \log(x-2) = \log(x+10)$	
۱۱	اگر $\log_b a = \frac{3}{2}$ باشد آن گاه $\log_b ab^2$ را محاسبه کنید.	۱
۱۲	عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید:	۱
	$\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi + x)$	
۱۳	در دایره‌ای با شعاع ۱۲ سانتی‌متر طول کمان مقابل به زاویه مرکزی 120° ، چند سانتی‌متر است؟	۱
۱۴	نمودار تابع $y = 1 - \sin x$ را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید.	۱
۱۵	سینوس و کسینوس زاویه 105° را به دست آورید.	۱
۱۶	مقدار a را بدست آورید اگر تابع f در نقطه‌ی $x=1$ حد داشته باشد:	۱
	$f(x) = \begin{cases} \frac{ax+3}{2x-1} & x > 1 \\ x^2 + 4 & x < 1 \end{cases}$	
۱۷	حاصل حدهای زیر را به دست آورید:	۱/۵
	الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]-1}{2[x]+1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x}$	

موفق و سربلند باشید...

پاسخنامه تشریحی

۱	دو نقاش در حال رنگ زدن یک سالن هستند. اگر دو نقاش با هم کار کنند ۱۸ روزه کار تمام می‌شود ولی اگر هر کدام به تنهایی کار کنند نقاش اول ۵ روز زودتر از دیگری کار را تمام می‌کند. هر کدام از این دو نقاش به تنهایی کار را چند روزه تمام می‌کنند؟	۱
	$\frac{1}{x} = \text{مقدار کاری که نقاش اول در یک روز انجام می‌دهد} \rightarrow \text{تعداد روزهای نقاش اول} = x$ $\frac{1}{x+10} = \text{مقدار کاری که نقاش دوم در یک روز انجام می‌دهد} \rightarrow \text{تعداد روزهای نقاش دوم} = x + 10$	

$\frac{1}{18} = \text{مقدار کاری که فرد با هم در یک روز انجام می دهند}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{x+10+x}{x(x+10)} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+10}{x^2+10x} = \frac{1}{18} \Rightarrow 36x + 270 = x^2 + 10x$$

$$\Rightarrow x^2 - 26x - 270 = 0 \Rightarrow (x - 30)(x + 9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 30 = 0 \rightarrow x = 30 \\ x + 9 = 0 \rightarrow x = -9 \text{ غلط} \end{cases} \begin{matrix} \swarrow \text{روز} \\ \searrow \text{روز} \end{matrix} \begin{matrix} \text{قاسم} = 30 \\ \text{قاسم} = 30 + 10 = 40 \end{matrix}$$

در یک دنباله حسابی $S_n = 2n^2 + 5n$ است. مجموع ده جمله اول و جمله عمومی این دنباله را بیابید.

$$S_1 = a_1 \rightarrow a_1 = 2(1)^2 + 5(1) = 2 + 5 = 7$$

$$S_2 = a_1 + a_2 \rightarrow a_1 + a_2 = 2(2)^2 + 5(2) = 8 + 10 = 18 \xrightarrow{a_1=7}$$

$$7 + a_2 = 18 \rightarrow a_2 = 11$$

$$d = a_2 - a_1 = 11 - 7 = 4$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + d(n-1) \Rightarrow a_n = 7 + 4(n-1)$$

$$\Rightarrow a_n = 4n + 3$$

اگر $x = -1$ یک ریشهی معادلهی $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، مقدار m و ریشهی دیگر معادله را بدست آورید.

$$x = -1 \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{استفاده}} 4(-1)^2 - m(-1) - 7 = 0 \Rightarrow 4 + m - 7 = 0$$

$$\Rightarrow m = 3$$

$$\Rightarrow 4n^2 - 3n - 7 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(4)(-1) = 9 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2(4)} = \frac{3 \pm 5}{8} = \begin{cases} \frac{14}{8} = \frac{7}{4} \\ -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

سه نقطه‌ی $A(1, 3)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(5, -5)$ سه رأس مثلث ABC هستند.

الف) طول اضلاع مثلث را بدست آورید.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5+1)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

ب) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

$$\left. \begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \sqrt{85}^2 = 85 \\ \overline{AC}^2 &= \sqrt{80}^2 = 80 \\ \overline{AB}^2 &= \sqrt{5}^2 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow \text{مثلث } ABC \text{ قائم‌الزاویه است}$$

مقادیر a و b را چنان بیابید که رابطه‌ی زیر یک تابع باشد:

$$R = \{(3, 2a-1), (2, 1), (-3, b+1), (-2, 6), (-3, 2b-7), (3, -5)\}$$

$$(3, 2a-1) = (3, -5) \Rightarrow 2a-1 = -5 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

$$(-3, b+1) = (-3, 2b-7) \Rightarrow b+1 = 2b-7 \Rightarrow 1+7 = 2b-b \Rightarrow b = 8$$

دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید:

$$\text{الف) } f(x) = \sqrt{4x-3} \rightarrow 4x-3 \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow D_f = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$$

$$\text{ب) } g(x) = \frac{3x+1}{x^2-3x-10}$$

$$\rightarrow x^2-3x-10=0 \Rightarrow (x-5)(x+2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \rightarrow x=5 \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \end{cases} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{5, -2\}$$

اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ دو تابع باشند:

الف) مقدار $(2f+g)(4)$ را بدست آورید.

$$(2f+g)(4) = 2f(4) + g(4) = 2\left(\frac{1}{4-1}\right) + \sqrt{4-3} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

ب) مقدار $(fog)(7)$ را بدست آورید.

$$(fog)(7) = f(g(7)) = f(\sqrt{7-3}) = f(2) = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

ج) دامنه‌ی تابع fog را بیابید.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-3}) = \frac{1}{\sqrt{x-3}-1}$$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \\ \sqrt{x-3}-1 \neq 0 \rightarrow \sqrt{x-3} \neq 1 \rightarrow x-3 \neq 1 \rightarrow x \neq 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{استنتاج}} D_{fog} = [3, +\infty) - \{4\}$$

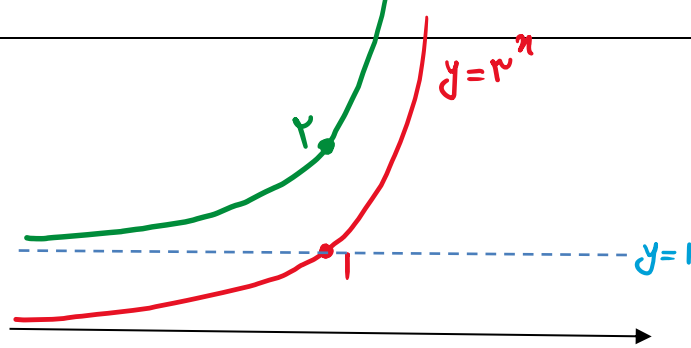
الف) حدود m را بیابید اگر تابع $f(x) = \left(\frac{3}{2} - m\right)^x$ یک تابع نمایی باشد.

شرایط تابع نمایی: $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} - m > 0 \Rightarrow m < \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} - m \neq 1 \Rightarrow m \neq \frac{3}{2} - 1 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{استنتاج}}$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

ب) نمودار تابع $y = 3^x + 1$ را رسم کنید.



۹

با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید:

الف) $\log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

ب) $\log_{10} 0.1 = \log_{10} 10^{-1} = -1 \times \log_{10} 10 = -1 \times 1 = -1$

۱۰

معادله لگاریتمی زیر را حل کنید:

$$2 \log(x-2) = \log(x+10) \Rightarrow \log(x-2)^2 = \log(x+10)$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = (x+10) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x + 10$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 - x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \quad \checkmark \\ x=-1 \quad \times \end{cases}$$

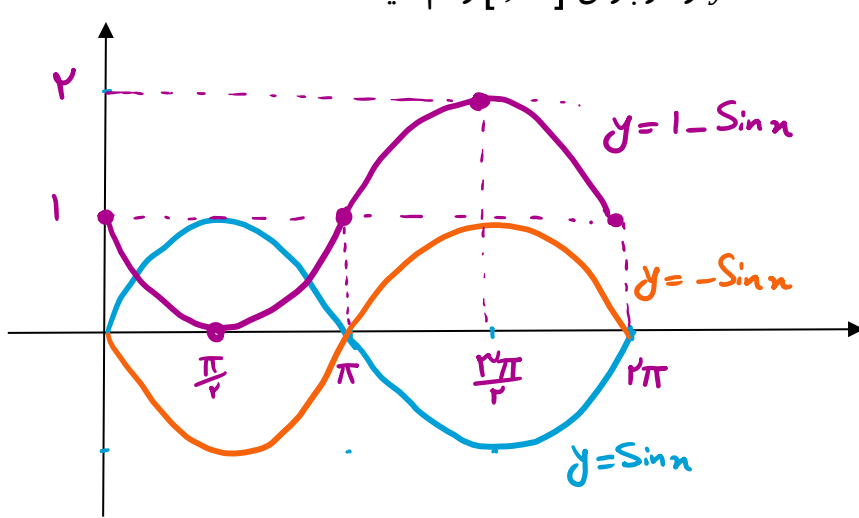
دامنه تعریف لگاریتم: $\begin{cases} x-2 > 0 \rightarrow x > 2 \\ x-2 \neq 1 \rightarrow x \neq 3 \\ x+10 > 0 \rightarrow x > -10 \\ x+10 \neq 1 \rightarrow x \neq -9 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 2, x \neq 3$

۱۱

اگر $\log_b a = \frac{3}{2}$ باشد آن گاه $\log_b ab^2$ را محاسبه کنید.

$$\log_b ab^2 = \log_b a + \log_b b^2 = \log_b a + 2 \log_b b$$

$$= \frac{3}{2} + 2(1) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

	عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید: $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) + \sin(\pi + x)$ $\left. \begin{aligned} \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) &= -\sin x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) + \sin(\pi + x)$ $= \sin x + \cancel{\sin x} - \cancel{\sin x}$ $= \sin x$	۱۲
	در دایره‌ای با شعاع ۱۲ سانتی‌متر طول کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی ۱۲۰°، چند سانتی‌متر است؟ $\left. \begin{aligned} R &= 12 \text{ cm} \\ \theta &= 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \end{aligned} \right\} \rightarrow L = R \times \theta$ $L = 12 \times \frac{2\pi}{3}$ $L = 8\pi \text{ cm}$	۱۳
	نمودار تابع $y = 1 - \sin x$ را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید. 	۱۴
	سینوس و کسینوس زاویه ۱۰۵° را به دست آورید. $\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \times \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \times \sin 60^\circ$ $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}$	۱۵

$$\begin{aligned} \cos 10 &= \cos(40 + 40) = \cos 40 \times \cos 40 - \sin 40 \times \sin 40 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

مقدار a را بدست آورید اگر تابع f در نقطه‌ی $x=1$ حد داشته باشد:

۱۶

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax+3}{2x-1} & x > 1 \\ x^2 + 4 & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax+3}{2x-1} = \frac{a(1)+3}{2(1)-1} = \frac{a+3}{1} = a+3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 4) = 1^2 + 4 = 5$$

شرط وجود

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a+3 = 5 \\ &\Rightarrow \boxed{a=2} \end{aligned}$$

حاصل حدهای زیر را به دست آورید:

۱۷

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]-1}{2[x]+1} = \frac{[2^+]-1}{2[2^+]+1} = \frac{2-1}{2(2)+1} = \frac{1}{5}$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = \frac{1^2 + 3(1) - 4}{1^2 - 1} = \frac{1 + 3 - 4}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{رنگ اجماع}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+4) \cancel{(x-1)}}{(x+1) \cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{1+4}{1+1} = \frac{5}{2}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\sin(0)}{\sin(2 \times 0)} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

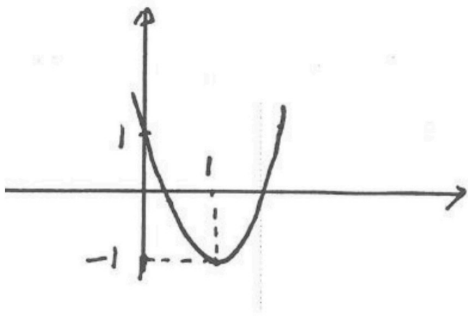
$$\xrightarrow{\text{رنگ اجماع}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sin x}}{2 \cancel{\sin x} \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2 \cos(0)}$$

$$= \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

نام و نام خانوادگی:
 مقطع و رشته: یازدهم ریاضی
 نام پدر:
 شماره داوطلب:
 تعداد صفحه سؤال: ۳ صفحه

جمهوری اسلامی ایران
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۲ تهران
 دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحد سعادت آباد
 آزمون ترم نوبت دوم سال تحصیلی ۹۷-۹۸

نام درس: حسابان
 نام دبیر: غلامرضا محبی
 تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۰۳/۰۵
 ساعت امتحان: ۰۰:۰۸ صبح / عصر
 مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نمره به عدد:	نمره به حروف:	محل مهر و امضاء مدیر
		نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	
ردیف	سؤالات	نمره	پاسخ	
۱	جاهای خالی را با عبارت های مناسب پُر کنید . الف- معادله ی $X^2 - 4 = \frac{1}{X}$ دارای ریشه است ب-مجموع ۲۰ جمله ی اول دنباله ی $2, 9, 16, \dots$ برابر است با..... ج- اندازه ی زاویه ی 12° برحسب رادیان برابر است با..... د- اگر $f(x) = [2x - 1]$ باشد آنگاه $f(\sqrt{2} - 1)$ برابر است با.....	۱,۲۵		
۲	با توجه به شکل سهمی داده شده، معادله ی سهمی را بنویسید. . 	۱		
۳	اگر $A(1, -2)$ رأس یک مربع و معادله ی یک ضلع مربع $2x + y = 3$ باشد. مساحت این مربع چقدر است؟	۰,۷۵		
۴	اگر $A(3, 1)$ و $B(-1, 5)$ مفروض باشد نقطه ی برخورد عمود منصف AB با محور X ها را بدست آورید.	۱		
۵	نمودار تابع $f(x) = x[x] - 1$ را در بازه ی $[-1, 2]$ رسم کنید. .	۱,۲۵		

۰,۵	اگر $f = ۱۱,۷, -۲,۴, ۳, -۵$ و $g = ۲, ۱۱, ۴, -۲, ۶, ۳, ۳, ۲$ مفروض باشند موارد fog و gof را بدست آورید؟	۶
۱,۲۵	به کمک رسم نمودار، وارون پذیری تابع $f(x) = \sqrt{۲-x} + ۳$ را نشان داده سپس ضابطه ی تابع وارون را بدست آورید؟	۷
۱	نمودار تابع زیر را رسم کنید. الف) $\log_r^{x-۱}$ ب) $y = ۲^{-x} - ۱$	۸
۱	مقدار x را در معادله ی زیر بدست آورید. $\log(x-۲) = ۲\log ۲ - \log(x-۴)$	۹
۱	اگر $\log ۲ = ۰/۳$ و $\log ۳ = ۰/۴$ باشد مقدار $\log ۱۸ \times ۷۵$ را به دست آورید؟	۱۰
۱	اگر $\sin x = \frac{1}{۳}$ و x در رُبع دوم باشد مقادیر $\sin ۲x$ و $\cos ۲x$ را بدست آورید؟	۱۱
۱	مقادیر مثلثاتی زیر را بدست آورید. الف) $\sin ۱۰۵^\circ$ ب) $\cos(-۲۴۰) + \sin(۳۰۰)$	۱۲

۱	نمودار $y = \cos(x + \frac{\pi}{3}) + 2$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.	۱۳
۱	اگر یک مخروط به شعاع قاعده $R = ۱۲^{cm}$ و ارتفاع $h = ۹^{cm}$ را گسترش دهیم در شکل گسترده ی آن، زاویه ی قطاع چند رادیان است.	۱۴
۳	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. $\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x}$ $\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x^2 - 8x}{x^2 - x - 2}$ $\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6}$	۱۵
۱,۲۵	مقادیر a و b را طوری بدست آورید که تابع زیر در R پیوسته باشد $f(x) = \begin{cases} a[x] + x & x < -1 \\ 2x - b & -1 \leq x < 2 \\ x^2 + a & 2 \leq x \end{cases}$	۱۶
۱	تابع $f(x) = \frac{ x }{x} + x$ را رسم کنید سپس نقاط ناپیوستگی آن را مشخص کنید	۱۷
۰,۷۵	اگر بازه ی $(x - 2, 3x + 1)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را بدست آورید.	۱۸

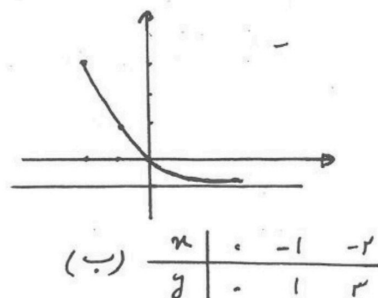
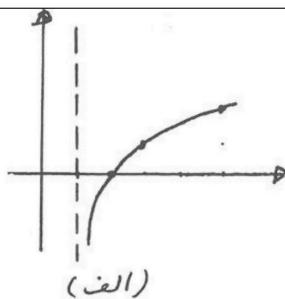


اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۲ تهران
دبیرستان غیر دولتی پسرانه سرای دانش واحد سعادت آباد
کلید سؤالات پایان ترم نوبت دوم سال تحصیلی ۹۷-۹۸

نام درس: حسابان
نام دبیر: غلامرضا محبی
تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۰۳/۰۵
ساعت امتحان: ۸:۰۰ صبح / عصر
مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	الف) ۲ (ب) ۱۳۷۰ (ج) $\frac{\pi}{15}$ (د) -۱	
۲	$y = a(x-1)^2 - 1 \rightarrow 1 = a - 1 \rightarrow a = 2$ $\rightarrow y = 2(x-1)^2 - 1 \rightarrow y = 2x^2 - 4x + 1$	
۳	$2x + y - 3 = 0, A(1, -2) \rightarrow AH = \frac{ 2x + y - 3 }{\sqrt{4+1}}$ $\rightarrow AH = \frac{ 2-2-3 }{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \rightarrow S = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 \rightarrow S = \frac{9}{5}$	
۴	$N\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{1+5}{2}\right) \rightarrow N(1, 3)$ $m = \frac{5-1}{-1-3} \rightarrow m = \frac{4}{-4} = -1 \rightarrow m' = 1 \Rightarrow y - 3 = 1(x-1)$ $\Rightarrow y = x + 2$	
۵	$-1 \leq x < 0 \rightarrow y = -x - 1 \rightarrow$ $0 \leq x < 1 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ $1 \leq x < 2 \rightarrow y = x - 1 \rightarrow$ 	
۶	$f \circ g = 2, 7, 4, 4, 6, -5, 3, -5$ $g \circ f = -2, -2$	
۷	 $2-x = 0 \rightarrow x = 2$ $2-x = 1 \rightarrow x = 1$ $2-x = 4 \rightarrow x = -2$ $y = \sqrt{2-x} + 2 \rightarrow \sqrt{2-x} = y - 2$ $\rightarrow 2-x = (y-2)^2 \rightarrow x = 2-(y-2)^2 \rightarrow y = 2-(x-2)^2$	

x	2	3	5
y	0	1	2



۸

$$\log(x-2) + \log(x-4) = \log 4 \rightarrow \log(x-2)(x-4) = \log 4$$

$$\rightarrow x^2 + 6x + 8 = 4 \rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \rightarrow x = 3 \pm \sqrt{5} \rightarrow x = 3 + \sqrt{5}$$

۹

$$\log(18 \times 75) = \log(2 \times 3^2 \times 5^2) = \log 2 + 2 \log 3 + 2 \log 5$$

$$= \log 2 + 2 \log 3 + 2(1 - \log 2) = 0.3 + 1.1 + 2 \cdot 0.7 = 2.3$$

۱۰

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \frac{1}{9} + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9}$$

$$\rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{8}}{3} \rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{9}$$

۱۱

$$\sin 105 = \sin(60 + 45)$$

(الف)

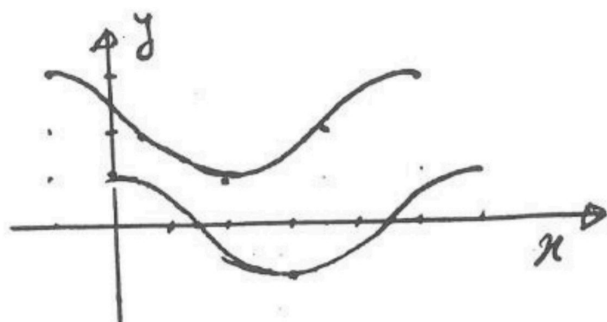
$$= \sin 60 \cdot \cos 45 + \cos 60 \cdot \sin 45 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(ب)

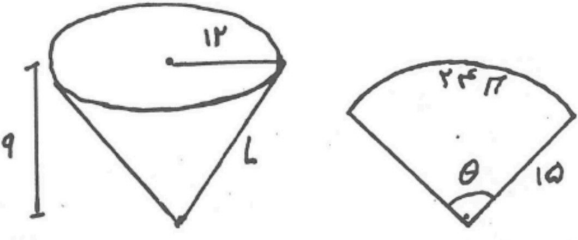
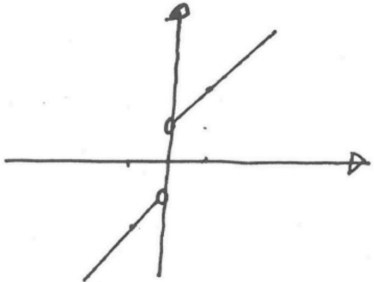
$$\cos(240) + \sin 300 = -\cos 60 - \sin 60 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$$

۱۲

ابتدا منحنی $y = \cos x$ را رسم می کنیم آنگاه آن را $\frac{\pi}{3} \approx 1$ واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا می بریم.



۱۳

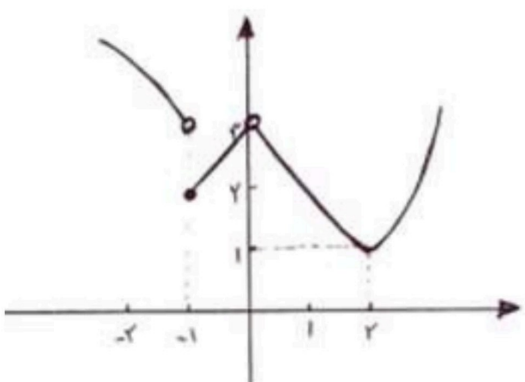
 $L^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \rightarrow L = 15$ $\rightarrow \theta = \frac{24\pi}{15} \rightarrow \theta = \frac{8\pi}{5}$	۱۴
الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x - \sin x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 + 2x - 8)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x+4)}{x+1} = 4$ ج) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} = \frac{x^2 - x - 2}{(x+3)(x-2)(x + \sqrt{x+2})}$ د) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+3)(x-2)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x+3)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{3}{20}$	۱۵
$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -2a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2 - b \end{array} \right\} \rightarrow -2a - 1 = -2 - b \rightarrow 2a - b = 1$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 - b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + a \end{array} \right\} \rightarrow 4 - b = 4 + a \rightarrow a + b = 0$ $\Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$	۱۶
$x > 0 \rightarrow y = x + 1 \rightarrow \begin{array}{c c} x & 1 \\ \hline y & 2 \end{array}$ $x < 0 \rightarrow y = x - 1 \rightarrow \begin{array}{c c} x & -1 \\ \hline y & -2 \end{array}$  ناپیوسته است. $x = 0$ تابع در	۱۷
$x - 2 < 2 < 3x + 1 \rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ \frac{1}{3} < x \end{cases} \rightarrow \frac{1}{3} < x < 4$	۱۸
نام و نام خانوادگی مصحح : امضاء:	جمع بارم : ۲۰ نمره

نام و نام خانوادگی:
 مقطع و رشته: یازدهم ریاضی
 نام پدر:
 شماره داوطلب:
 تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
 دبیرستان غیردولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین
 آزمون پایان ترم نوبت دوم سال تحصیلی ۹۸-۱۳۹۷

نام درس: حسابان ۱
 نام دبیر: سرکار خانم سعیدی
 تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۵
 ساعت امتحان: ۰۰:۰۸ صبح / عصر
 مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نمره به عدد:		محل مهر و امضاء مدیر
		نمره به حروف:	نمره تجدید نظر به عدد:	
نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	
ردیف	سوالات	ردیف	سوالات	
۱	جاهای خالی را با عبارت درست پر کنید. الف) معادله درجه دومی که ریشه هایش $1 \pm \sqrt{2}$ باشد به صورت است. ب) $\frac{5\pi}{3}$ رادیان برابر درجه است. ج) بازه $(x-1, 2x+5)$ یک همسایگی عدد ۲ می باشد. محدوده ی x است. د) وارون تابع $y = \sqrt{x-1} - 2$ تابع است.	۱/۵		
۲	مجموع شش جمله ی اول یک دنباله ی هندسی، سه برابر مجموع سه جمله اول آن است. قدرنسبت کدام است؟	۰/۷۵		
۳	اگر α, β ریشه های معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$ را بدست آورید؟	۱		
۴	معادله $ x^2 - 1 = 2x - 1$ را به روش هندسی حل کنید.	۱		
۵	مختصات رأس های مثلثی $A(1,3)$ و $B(-1,-1)$ و $C(-2,2)$ است. طول ارتفاع CH را بدست آورید؟	۱		
۶	اگر $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ و $g = \{(1,2), (2,5), (4,3), (5,1)\}$ باشند، مطلوبست: الف) تابع $g \circ f$ ب) $(\frac{g-3f}{2f})(2)$	۱		
۷	نامعادله ی توانی $4^{2x+1} > \frac{1}{512}$ را حل کنید.	۰/۷۵		
۸	جرم یک توده از باکتری در هر ساعت دو برابر می شود. در ابتدا ۱۰ گرم از این باکتری موجود است. الف- جرم توده را پس از t ساعت بصورت یک تابع نمایی بنویسید؟ ب- پس از چند ساعت جرم توده ۱۰۰ گرم خواهد شد؟ ($\log 2 = 0.3$)	۱		
۹	حاصل عبارت $\log_2^{\frac{1}{16}} + \log_4^{\frac{3}{4}} + \log^{0.01} + \log^1$ را بدست آورید.	۱		
۱۰	معادله مقابل را حل کنید:	۱		
	$\log^{(4-x)} = \log^{(6-x)} - \log^{(x)}$			
صفحه ی ۱ از ۲				

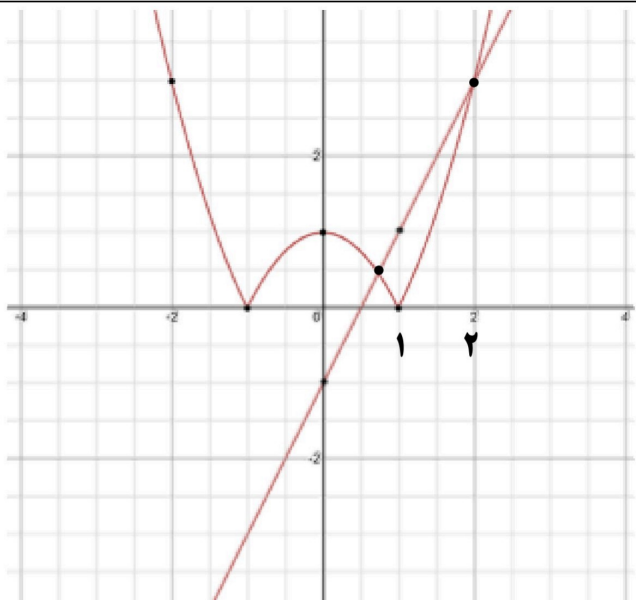
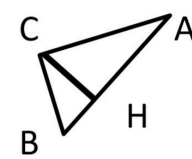
۱/۵	اگر $\sin \alpha = 0.6$, $\cos \beta = 0.2$ باشد و α و β حاده باشند حاصل عبارت زیر را بیابید؟	۱۱
	$\frac{\sin(\pi - \alpha) + \cos(-\beta)}{\cos(\pi + \alpha) + \sin(\frac{3\pi}{2} - \beta)}$	
۱	نمودار تابع $y = 2 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ را رسم کنید.	۱۲
۱/۵	اگر α , β به ترتیب زاویه های حاده و منفرجه باشند و $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = \frac{-12}{13}$ حاصل $\sin(\alpha - \beta)$ و $\sin 2\alpha$ را بیابید.	۱۳
۱/۲۵	نمودار تابع f به صورت مقابل است، حدود زیر را در صورت وجود مشخص کنید.  الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} f(-x)$ ج) $[\lim_{x \rightarrow 0} f(x)]$ د) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$	۱۴
۲/۵	حدود زیر را بیابید؟ الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2[x] - 4}{x - 2}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos 2x - 2}{x \sin x}$	۱۵
۱/۵	a و b را طوری بیابید تا تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} \frac{ x }{x} + a & x < 0 \\ -b & x = 0 \\ \frac{1 - \cos x}{3x^2} & x > 0 \end{cases}$	۱۶
۰/۷۵	آیا تابع $f(x) = [x]$ در بازه ی $[1, 2]$ پیوسته است؟ چرا؟	۱۷
صفحه ی ۲ از ۲		

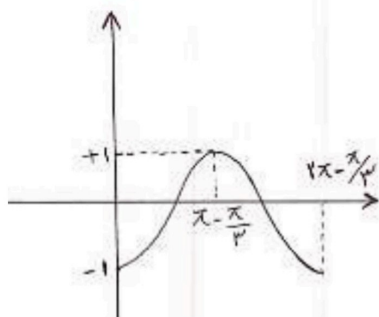
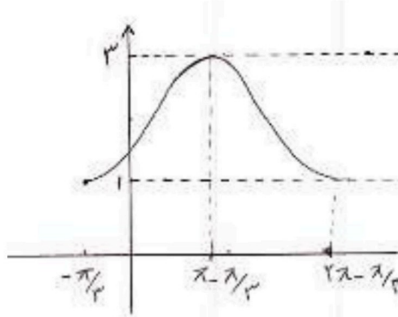


اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
دبیرستان غیر دولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین
کلید سؤالات پایان ترم نوبت دوم سال تحصیلی ۹۸-۹۷

نام درس: مسابان ۱
نام دبیر: سرکار خانم سعیدی
تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۴
ساعت امتحان: ۸ صبح/عصر
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	$s = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$ $, p = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) - 1 \implies x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (۰/۵)$ $\text{ب) } \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \implies \frac{D}{180} = \frac{5\pi}{3} \implies D = 300^\circ \quad (۰/۲۵)$ $\text{ج) } 2 \in (x - 1, 2x + 5) \implies \begin{cases} x - 1 < 2 \implies x < 3 \\ 2 < 2x + 5 \implies \frac{-3}{2} < x \end{cases} \implies \frac{-3}{2} < x < 3 \quad (۰/۲۵)$ $\text{د) } y + 2 = \sqrt{x - 1} \implies (y + 2)^2 = x - 1 \implies x = (y + 2)^2 + 1$ $\implies y = (x + 2)^2 + 1 \quad (۰/۵)$	
۲	$S_6 = 3S_3 \implies \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 3 \times \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} \quad (۰/۲۵)$ $\frac{(1-q^3)(1+q^3)}{1-q^3} = 3 \implies q^3 = 2 \implies q = \sqrt[3]{2} \quad (۰/۲۵)$	
۳	$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -4 \quad (۰/۲۵)$ $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1 \quad (۰/۲۵)$ $\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\beta + 1} = \frac{\beta + 1 + \alpha + 1}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} = \frac{S + 2}{P + S + 1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$	

$y_1 = x^2 - 1 $ $y_2 = 2x - 1$ $x = 2, x \in (0, 1) \quad (۰/۵)$		۴
(رسم شکل ۰/۵ نمره)		
$m_{AB} = \frac{4}{2} = 2$ AB معادله خط: $y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 2x - 1 = 0 \quad (۰/۵)$ $CH = \frac{ 2+4-1 }{\sqrt{1+4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad (۰/۵)$		۵
$g \circ f = \{(1, 5), (3, 3), (4, 1)\} \quad (۰/۵)$ $\left(\frac{g-3f}{2f}\right)(2) = \frac{g(2)-3f(2)}{2f(2)} = \frac{5-9}{2 \times 3} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \quad (۰/۵)$		۶
$2^{4x+2} > 2^{-9} \xrightarrow{\text{چون } 2 > 1 \text{ تابع صعودی است}} 4x + 2 > -9 \Rightarrow x > \frac{-11}{4}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)		۷
الف) $m(t) = 10 \times 2^t \quad (۰/۲۵)$ ب) $m(t) = 100 \Rightarrow 100 = 10 \times 2^t \Rightarrow 2^t = 10 \Rightarrow t = \log_2^{10} = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)		۸
$\log_2^{2^{-4}} + \log_2^{2^{\frac{2}{3}}} + \log^{10^{-2}} + 0 = -4 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} - 2 = \frac{-17}{3}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)		۹
$\log(4 - x) = \log \frac{6-x}{x} \Rightarrow 4 - x = \frac{6-x}{x} \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (۰/۵)$ $x = 2$ ق ق (۰/۲۵) $x = 3$ ق ق (۰/۲۵)		۱۰
$\frac{\sin(\pi - \alpha) + \cos(-\beta)}{\cos(\pi + \alpha) + \sin(\frac{3\pi}{2} - \beta)} = \frac{\sin \alpha + \cos \beta}{-\cos \alpha - \cos \beta} = \frac{0.6 + 0.2}{-0.8 - 0.2} = -0.8$ (۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)		۱۱

		۱۲
(۰/۵)	(۰/۵)	
$\sin \alpha = \frac{1}{3} \xrightarrow{\alpha \text{ ربع اول است}} \cos \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3} \quad (۰/۲۵)$ $\cos \beta = \frac{-12}{13} \xrightarrow{\beta \text{ ربع دوم است}} \sin \beta = \frac{5}{13} \quad (۰/۲۵)$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \frac{-1}{3} \times \frac{-12}{13} - \frac{5}{13} \times \frac{\sqrt{8}}{3} \quad (۰/۵)$ $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{8}}{9}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)		۱۳
الف) ۳ (۰/۲۵) ب) وجود ندارد (۰/۵) ج) ۳ (۰/۲۵) د) ۲ (۰/۲۵)		۱۴
الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-\sqrt{x}} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x+\sqrt{x})}{x(x-1)} = 4 \quad (۰/۷۵)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \quad (۰/۷۵)$ $x < 2$ ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos 2x-1)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(-2 \sin^2 x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin x}{x} = -4 \quad (۱)$		۱۵
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(x) \quad (۰/۲۵)$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{3x^2} = \frac{1}{6} \quad (۰/۵)$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-x}{x} + a = -1 + a \quad (۰/۲۵)$ $f(0)=b \quad , \quad b = \frac{1}{6} \quad , \quad -1 + a = \frac{1}{6} \implies a = \frac{7}{6} \quad (۰/۵)$		۱۶
۱) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ $f(1) = 1$ در $x=1$ پیوستگی راست دارد. ۱) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ $f(2) = 2$ در $x=2$ پیوستگی چپ ندارد. ۳) در بازه $(۱,۲)$ پیوسته است. پس $f(x)$ در بازه $[1, 2]$ پیوسته نیست.		۱۷
نام و نام خانوادگی مصحح : بیتا سعیدی		جمع بارم : ۲۰ شماره
امضاء:		

۱	دو نقاش در حال رنگ زدن یک سالن هستند. اگر دو نقاش با هم کار کنند ۱۸ روزه کار تمام می شود ولی اگر هر کدام به تنهایی کار کنند نقاش اول ۵ روز زودتر از دیگری کار را تمام می کند. هر کدام از این دو نقاش به تنهایی کار را چند روزه تمام می کنند؟	۱
۲	در یک دنباله ی حسابی $S_n = 2n^2 + 5n$ است. مجموع ده جمله ی اول و جمله ی عمومی این دنباله را بیابید.	۱
۳	اگر $x = -1$ یک ریشه ی معادله ی $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، مقدار m و ریشه ی دیگر معادله را بدست آورید.	۱
۴	سه نقطه ی $A(1, 3)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(5, -5)$ سه رأس مثلث ABC هستند. الف) طول اضلاع مثلث را بدست آورید. ب) نشان دهید مثلث ABC قائم الزاویه است.	۱/۵
۵	مقادیر a و b را چنان بیابید که رابطه ی زیر یک تابع باشد: $R = \{(3, 2a-1), (2, 1), (-3, b+1), (-2, 6), (-3, 2b-7), (3, -5)\}$	۱
۶	دامنه ی توابع زیر را به دست آورید: الف) $f(x) = \sqrt{4x-3}$ ب) $g(x) = \frac{3x+1}{x^2-3x-10}$	۱/۵
۷	اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ دو تابع باشند: الف) مقدار $(2f+g)(4)$ را بدست آورید. ب) مقدار $(fog)(7)$ را بدست آورید. ج) دامنه ی تابع fog را بیابید.	۲
۸	الف) حدود m را بیابید اگر تابع $f(x) = \left(\frac{3}{2} - m\right)^x$ یک تابع نمایی باشد. ب) نمودار تابع $y = 3^x + 1$ را رسم کنید.	۱
۹	با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت های زیر را بدست آورید: الف) $\log_9 27$ ب) $\log_{1.0/0.1}$	۱

۱۰	معادله لگاریتمی زیر را حل کنید:	۱/۵
	$2 \log(x-2) = \log(x+10)$	
۱۱	اگر $\log_b a = \frac{3}{2}$ باشد آن گاه $\log_b ab^2$ را محاسبه کنید.	۱
۱۲	عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید:	۱
	$\sin(\pi-x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) + \sin(\pi+x)$	
۱۳	در دایره‌ای با شعاع ۱۲ سانتی‌متر طول کمان مقابل به زاویه مرکزی 120° ، چند سانتی‌متر است؟	۱
۱۴	نمودار تابع $y = 1 - \sin x$ را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید.	۱
۱۵	سینوس و کسینوس زاویه 105° را به دست آورید.	۱
۱۶	مقدار a را بدست آورید اگر تابع f در نقطه‌ی $x=1$ حد داشته باشد:	۱
	$f(x) = \begin{cases} \frac{ax+3}{2x-1} & x > 1 \\ x^2+4 & x < 1 \end{cases}$	
۱۷	حاصل حدهای زیر را به دست آورید:	۱/۵
	الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]-1}{2[x]+1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x}$	

موفق و سربلند باشید...

پاسخنامه تشریحی

۱	دو نقاش در حال رنگ زدن یک سالن هستند. اگر دو نقاش با هم کار کنند ۱۸ روزه کار تمام می‌شود ولی اگر هر کدام به تنهایی کار کنند نقاش اول ۵ روز زودتر از دیگری کار را تمام می‌کند. هر کدام از این دو نقاش به تنهایی کار را چند روزه تمام می‌کنند؟	۱
	$\frac{1}{x} = \text{مقدار کاری که نقاش اول در یک روز انجام می‌دهد} \rightarrow \text{تعداد روزهای نقاش اول} = x$ $\frac{1}{x+10} = \text{مقدار کاری که نقاش دوم در یک روز انجام می‌دهد} \rightarrow \text{تعداد روزهای نقاش دوم} = x+10$	

$\frac{1}{18} = \text{مقدار کار در یک روز با هم در یک روز انجام می دهند}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{x+10+x}{x(x+10)} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+10}{x^2+10x} = \frac{1}{18} \Rightarrow 36x + 270 = x^2 + 10x$$

$$\Rightarrow x^2 - 26x - 270 = 0 \Rightarrow (x - 30)(x + 9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 30 = 0 \rightarrow x = 30 \\ x + 9 = 0 \rightarrow x = -9 \text{ غلط} \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \text{روز} = 30 \\ \rightarrow \text{روز} = 30 + 10 = 40 \end{matrix}$$

در یک دنباله حسابی $S_n = 2n^2 + 5n$ است. مجموع ده جمله اول و جمله عمومی این دنباله را بیابید.

$$S_1 = a_1 \rightarrow a_1 = 2(1)^2 + 5(1) = 2 + 5 = 7$$

$$S_2 = a_1 + a_2 \rightarrow a_1 + a_2 = 2(2)^2 + 5(2) = 8 + 10 = 18 \xrightarrow{a_1=7}$$

$$7 + a_2 = 18 \rightarrow a_2 = 11$$

$$d = a_2 - a_1 = 11 - 7 = 4$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + d(n-1) \Rightarrow a_n = 7 + 4(n-1)$$

$$\Rightarrow a_n = 4n + 3$$

اگر $x = -1$ یک ریشهی معادلهی $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، مقدار m و ریشهی دیگر معادله را بدست آورید.

$$x = -1 \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{است}} 4(-1)^2 - m(-1) - 7 = 0 \Rightarrow 4 + m - 7 = 0$$

$$\Rightarrow m = 3$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 3x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(4)(-1) = 9 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2(4)} = \frac{3 \pm 5}{8} = \begin{cases} \frac{14}{8} = \frac{7}{4} \\ -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

سه نقطه‌ی $A(1, 3)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(5, -5)$ سه رأس مثلث ABC هستند.

الف) طول اضلاع مثلث را بدست آورید.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5+1)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

ب) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

$$\left. \begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \sqrt{85}^2 = 85 \\ \overline{AC}^2 &= \sqrt{80}^2 = 80 \\ \overline{AB}^2 &= \sqrt{5}^2 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow \text{مثلث } ABC \text{ قائم‌الزاویه است}$$

مقادیر a و b را چنان بیابید که رابطه‌ی زیر یک تابع باشد:

$$R = \{(3, 2a-1), (2, 1), (-3, b+1), (-2, 6), (-3, 2b-7), (3, -5)\}$$

$$(3, 2a-1) = (3, -5) \Rightarrow 2a-1 = -5 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

$$(-3, b+1) = (-3, 2b-7) \Rightarrow b+1 = 2b-7 \Rightarrow 1+7 = 2b-b \Rightarrow b = 8$$

دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید:

$$\text{الف) } f(x) = \sqrt{4x-3} \rightarrow 4x-3 \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow D_f = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$$

$$\text{ب) } g(x) = \frac{3x+1}{x^2-3x-10}$$

$$\rightarrow x^2-3x-10=0 \Rightarrow (x-5)(x+2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \rightarrow x=5 \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \end{cases} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{5, -2\}$$

۷ اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ دو تابع باشند:

الف مقدار $(2f+g)(4)$ را بدست آورید.

$$(2f+g)(4) = 2f(4) + g(4) = 2\left(\frac{1}{4-1}\right) + \sqrt{4-3} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

ب) مقدار $(fog)(7)$ را بدست آورید.

$$(fog)(7) = f(g(7)) = f(\sqrt{7-3}) = f(2) = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

ج) دامنه‌ی تابع fog را بیابید.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-3}) = \frac{1}{\sqrt{x-3}-1}$$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \\ \sqrt{x-3}-1 \neq 0 \rightarrow \sqrt{x-3} \neq 1 \rightarrow x-3 \neq 1 \rightarrow x \neq 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{استنتاج}} D_{fog} = [3, +\infty) - \{4\}$$

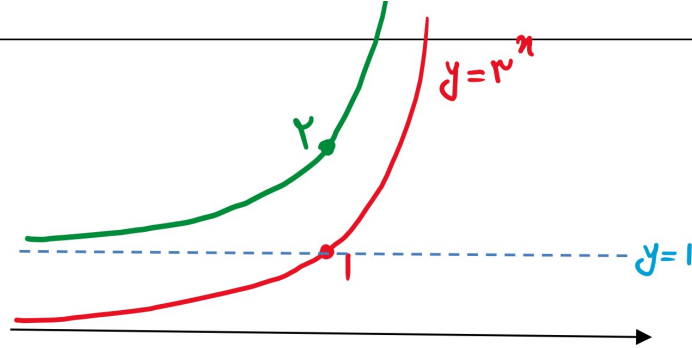
۸ الف) حدود m را بیابید اگر تابع $f(x) = \left(\frac{3}{2} - m\right)^x$ یک تابع نمایی باشد.

شرایط تابع نمایی: $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} - m > 0 \Rightarrow m < \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} - m \neq 1 \Rightarrow m \neq \frac{3}{2} - 1 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{استنتاج}}$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

ب) نمودار تابع $y = 3^x + 1$ را رسم کنید.



۹

با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید:

الف) $\log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

ب) $\log_{10} .0/.01 = \log_{10} 10^{-2} = -2 \times \log_{10} 10 = -2 \times 1 = -2$

۱۰

معادله لگاریتمی زیر را حل کنید:

$$2 \log(x-2) = \log(x+10) \Rightarrow \log(x-2)^2 = \log(x+10)$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = (x+10) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x + 10$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 - x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \quad \checkmark \\ x=-1 \quad \times \end{cases}$$

دامنه تعریف لگاریتم :

$$\begin{cases} x-2 > 0 \rightarrow x > 2 \\ x-2 \neq 1 \rightarrow x \neq 3 \\ x+10 > 0 \rightarrow x > -10 \\ x+10 \neq 1 \rightarrow x \neq -9 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 2, x \neq 3$$

۱۱

اگر $\log_b a = \frac{3}{2}$ باشد آن گاه $\log_b ab^2$ را محاسبه کنید.

$$\log_b ab^2 = \log_b a + \log_b b^2 = \log_b a + 2 \log_b b$$

$$= \frac{3}{2} + 2(1) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

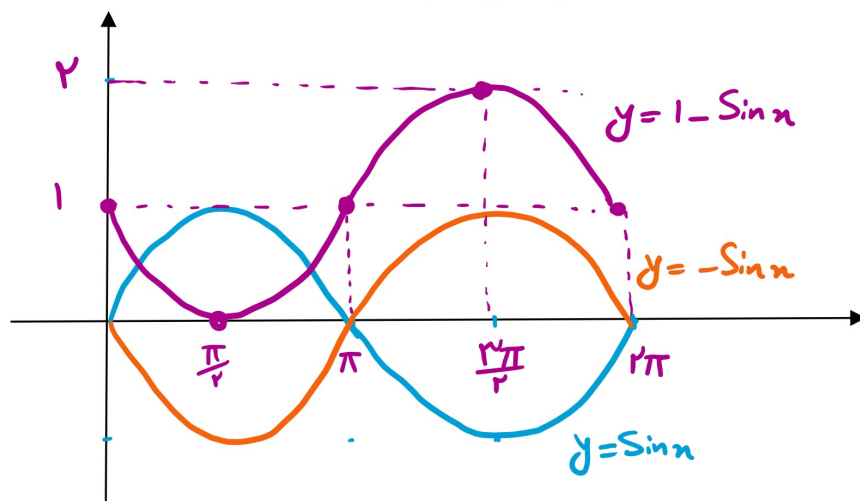
$$\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) + \sin(\pi + x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = \sin x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) + \sin(\pi + x) \\ = \sin x + \cancel{\sin x} - \cancel{\sin x} \\ = \sin x$$

در دایره‌ای با شعاع ۱۲ سانتی‌متر طول کمان مقابل به زاویه مرکزی 120° ، چند سانتی‌متر است؟

$$\left. \begin{array}{l} R = 12 \text{ cm} \\ \theta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow L = R \times \theta \\ L = 12 \times \frac{2\pi}{3} \\ L = 8\pi \text{ cm}$$

نمودار تابع $y = 1 - \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.



سینوس و کسینوس زاویه 105° را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \sin 105^\circ &= \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \times \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \times \sin 60^\circ \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 10 &= \cos(40 + 40) = \cos 40 \times \cos 40 - \sin 40 \times \sin 40 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

مقدار a را بدست آورید اگر تابع f در نقطه‌ی $x=1$ حد داشته باشد:

۱۶

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax+3}{2x-1} & x > 1 \\ x^2+4 & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax+3}{2x-1} = \frac{a(1)+3}{2(1)-1} = \frac{a+3}{1} = a+3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+4) = 1^2+4 = 5$$

شرط وجود

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a+3 = 5 \\ &\Rightarrow \boxed{a=2} \end{aligned}$$

حاصل حدهای زیر را به دست آورید:

۱۷

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]-1}{2[x]+1} = \frac{[2^+]-1}{2[2^+]+1} = \frac{2-1}{2(2)+1} = \frac{1}{5}$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = \frac{1^2 + 3(1) - 4}{1^2 - 1} = \frac{1 + 3 - 4}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{رنگ ابطال}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+4) \cancel{(x-1)}}{(x+1) \cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{1+4}{1+1} = \frac{5}{2}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\sin(0)}{\sin(2 \times 0)} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{رنگ ابطال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sin x}}{2 \cancel{\sin x} \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2 \cos(0)}$$

$$= \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$